La prima forinola insegna che A = o, cioè che i due lati 6, e si accostano asintoti-camente, quando il vertice dell'angolo A è all'infinito; la seconda che il limite dell'angolo E non è l'angolo retto, come nel piano, ma un angolo minore di 90°, la cui grandezza dipende dalla distanza a, mediante la forinola

(24) •jD _£L «-r = ' *

(equivalente alla superiore). Se si chiamano parallele due geodetiche convergenti verso un medesimo punto all'infinito, come già si è fatto, si vede dunque che da un punto si possono condurre due distinte geodetiche parallele ad una geodetica data, che queste due parallele sono egualmente inclinate da una parte e dall'altra della geodetica condotta dallo stesso punto normalmente alla data, e che la loro inclinazione B sulla normale è legata alla lunghezza a di questa stessa normale mediante la relazione (24). Questo risultato s'accorda pienamente con quello che forma la base fondamentale della geometria non-euclidea, i cui principi, già famigliar! a GAUSS, sono stati compendiati maestrevolmente da LOBATSCHEWSKY *) sotto una veste sintetica. La possibilità della sua costruzione col mezzo dell'ordinaria sintesi (limitatamente allo spazio di tre dimensioni) dipende in primo luogo da ciò che, come si è dimostrato, negli spazi di curvatura costante (positiva o negativa) ogni figura può essere mutata arbitrariamente di posizione senza subire alcuna alterazione nella grandezza e nella disposizione mutua dei suoi elementi contigui, possibilità da cui dipende l'esistenza delle figure eguali e quindi la validità del principio di sovrapposizione. In secondo luogo negli spazi di curvatura costante negativa le geodetiche sono caratterizzate, come la retta euclidea, dalla proprietà di essere individuate senza ambiguità da due soli dei loro punti, talché vige per esse l'assioma della retta. E del pari le superficie di prim'ordine sono caratterizzate, come il piano euclideo, dalla proprietà di essere individuate senza ambiguità da tre soli dei loro punti, talché vige per esse l'assioma del piano. Inoltre le relazioni delle linee geodetiche colle superficie di prim'ordine e di 'queste fra loro, sono le stesse di quelle delle rette coi piani e dei piani fra loro, poiché una di quelle superficie contiene tutta una geodetica tosto che ne contiene due punti, e due di quelle superficie si segano secondo una geodetica (e sotto un angolo costante) se s'incontrano in un solo punto. Da questa corrispondenza consegue che se si ammettono gli assiomi fondamentali della geometria ordinaria, escludendo il postulato delle parallele, i teoremi che si ottengono sono eguali a quelli della geometria dello spazio di curvatura costante negativa, poiché questa seconda geometria ha le stesse basi di quella, tranne il postulato anzidetto. I teo-

*) Étuàes géométriques sur la théorie des paralUles (trad. HOÙEL), Paris, 1866.